מבוא לקשר כימי – בוחן-אמצע תשס"ד

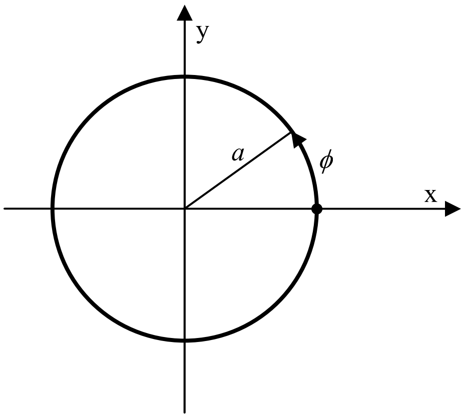
מרצה: פרופ' רועי בר משך הבוחן: שעה.

ענו על שאלה מתוך שתי השאלות. ניתן להשתמש במחברות ובספרים.

שימו לב: ניתן גם לענות על שתי השאלות, והטובה מהשלוש תקבע את הציון.

1. חלקיק בעל מסה μ נע על טבעת שרדיוסה a.

א. (33 נק') כיצד מתארים במכניקה קלאסית את מצבו של החלקיק? כיצד מתארים במכניקה קוואנטית את מצבו של החלקיק. עליך לציין גם את תנאי השפה המתאימים.



ב. (33 נק') מכינים חלקיק במצב $\psi\left(\phi\right)=1-\sin\phi$. מה הסיכוי שהחלקיק נמצא בחלק העליון של הטבעת ?

ג. (33 נק') (בהמשך לסעיף ב') כעבור כמה זמן יהא מצבו של החלקיק $\psi\left(\phi,t\right)=1+i\sin\phi$?

ניתן להשתמש באינטגרלים:

$$\int (1-\sin x)^2\,dx=\frac{1}{4}(6x-\sin 2x)+2\cos x$$

פתרון:

א. במכניקה קלאסית, מצב חלקיק קלאסי בטבעת מוגדר כאשר נתון מיקומו, כלומר הזווית ϕ ומהירותו כלומר קצב השתנות הזווית $\dot{\phi}$. במכניקה קוואנטית מצב חלקיק מוגדר על-ידי פונקציית הגל שלו $\psi\left(\phi\right)$. פונ' זו צריכה להיות רציפה[1] וחד-ערכית כלומר $\psi(\phi)=\psi(\phi+2\pi)$ שכן ϕ ו- $\phi+2\pi$ מציינים את אותה נקודה על הטבעת.

ב. בשיעור נרמלנו את פונקציית הגל:

$$\psi\left(\phi\right)=N\left(1-\sin\phi\right)\qquad\qquad N=\frac{1}{\sqrt{3\pi}}$$

הסיכוי להיות בחלק העליון של הטבעת, כלומר עם זוית ϕ בתחום $0\le\phi<\pi$ הוא:

$$P\left(0\le\phi<\pi\right)=\frac{1}{3\pi}\int_0^\pi\left(1-\sin\phi\right)^2 d\phi=\frac{1}{3\pi}\left[\frac{1}{4}(6x-\sin 2x)+2\cos x\right]_0^\pi$$

$$=\frac{1}{3\pi}\left[\frac{3}{2}\pi-4\right]=\frac{1}{2}-\frac{4}{3\pi}$$

ג. ההתפתחות בזמן היא: $\psi\left(\phi,t\right)=1-e^{-iE_1t/\hbar}\sin\phi$ וקיים: $\psi\left(\phi,\frac{\pi\hbar}{2E_1}\right)=1+i\sin\phi$.

2. חלקיק חופשי בעל מסה μ מצוי במצב $\psi(x)=e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. מודדים את התנע p שלו

א. (25 נק') מה הם תוצאות המדידה האפשריות?

ב. (25 נק') מהו ערך התצפית של התנע?

ג. (25 נק') אם תוצאת המדידה היא p_0 מה יהיה מצב החלקיק זמן t לאחר המדידה?

ד. (25 נק') לאחר המדידה מודדים את האנרגיה E של החלקיק. מה ניתן לומר על תוצאת המדידה? הסבר בפרוט.

פתרון:

א. כל המספרים הממשיים.

ב. נסמן ב- N את קבוע הנירמול, ואז:

$$\langle p\rangle = N^2\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = N^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\right)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = -i\hbar N^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left(\frac{-2x}{2\sigma^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$
$$= -\frac{i\hbar}{\sigma^2}N^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}xdx = 0$$

ג. מיד לאחר המדידה של התנע, אם התוצאה היא $\hbar k_0 = p_0$, פונקציית הגל היא הפונקציה העצמית של התנע, כלומר גל מונוכרומטי $\psi_k(x) = e^{i(kx-\omega_k t)}$, כאשר $\omega_k = \frac{\hbar k^2}{2\mu}$

ד. המצב לאחר המדידה הוא גם מצב עצמי של האנרגיה לכן: $E = \frac{p_0^2}{2\mu}$.

בהצלחה !

.